Dichtematrix und verschränkte Zustände

Felipe Gerhard

Universität Siegen

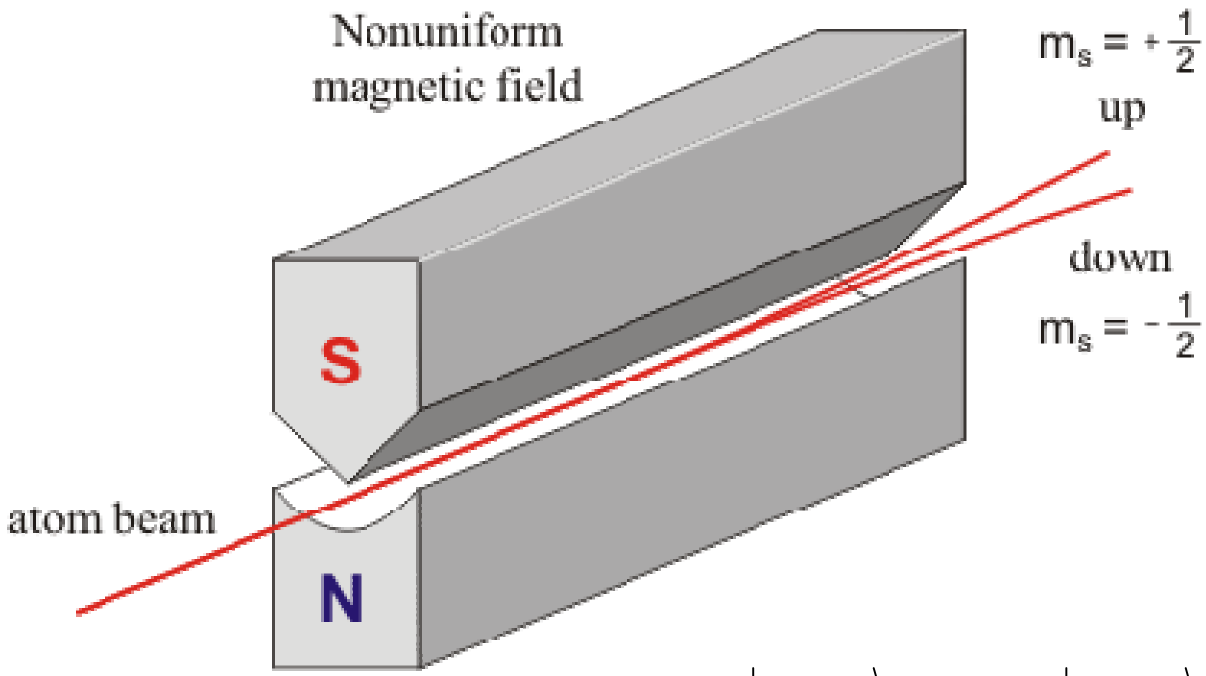
QM-Seminar, 20/06/2006

Übersicht

1. Reine und gemischte Zustände
2. Dichtematrix eines 2-Zustands-Systems
3. Definition & Eigenschaften des Dichteoperators
4. Gekoppelte Systeme & Verschränkung

1. Reine und gemischte Zustände

Stern-Gerlach-Versuch



$$\text{Zwei} - \text{Zustands} - \text{System:}\ \left|+\frac{1}{2}\right\rangle \text{ und } \left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

Bild: http://www.ktf-split.hr/glossary/en_o.php?def=spin

Reine Zustände

Ein Zustand heißt **rein**, wenn er sich schreiben lässt als:

$$|\varphi\rangle = a_1 \left|+\frac{1}{2}\right\rangle + a_2 \left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

mit $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ (Normierung)

oder allgemein:

$$|\varphi\rangle = \sum_i a_i |\Psi_i\rangle$$

mit $\sum_i |a_i|^2 = 1$ (Normierung)

$\Rightarrow$ **definierte Zeit - und Phasenentwicklung**

Gemischte Zustände

- Reine Zustände sind nicht die allgemeinsten Zustände.
- Betrachte zwei unabhängig voneinander präparierte Strahlen:

N_1 Teilchen im reinen Zustand $\left|+\frac{1}{2}\right\rangle$, N_2 in $\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$.

- unabhängig $\leftrightarrow$ keine definierte Phasenrelation!

- Um das Gemisch mit einem Zustandsvektor (lin. Superpos.) beschreiben zu können, müsste der Betrag und relative Phase der a_i bekannt sein.

Betrag: $W_i = \frac{N_i}{N_1 + N_2} = |a_i|^2$

- aber: Es gibt keine definierte Phasenrelation!

$\Rightarrow$ Ein Gemisch (Ensemble) ist analog zu einer vielfachen Präparierung eines einzelnen Quantensystems, bei dem die Zustände statistisch verteilt auftreten.

$\Rightarrow$ Nicht-reine Zustände heißen **gemischte Zustände**.

Gemischte Zustände

- weitere Beispiele:

- Zwei-Niveau-System bei Atomen; thermische Erzeugung

- Polarisation von Photonen

$\rightarrow$ Phasenlage ist statistisch verteilt

- Fazit:

rein:	gemischt:
$\lvert\varphi\rangle = \sum_i a_i \lvert\Psi_i\rangle$ mit $\sum_i \lvert a_i\rvert^2 = 1$	System in Zuständen $\lvert\varphi_i\rangle$, die statistisch mit w_i auftreten, mit $\sum_i w_i = 1$.
Zustandsvektor	???

$\Rightarrow$ anderes Konzept einführen!

2. Dichtematrix eines 2-Zustands-Systems

Dichtematrix für 2-Zustands-System

N_a Teilchen im beliebigen Zustand $|\varphi_a\rangle$, N_b in $|\varphi_b\rangle$.

Analog: $W_i = \dfrac{N_i}{N_a + N_b}$

Führe Dichte-Operator ein:

$$\rho = W_a |\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| + W_b |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b|$$

Der Dichteoperator enthält alle Informationen über das System.

Das Gemisch ist durch ρ vollständig beschrieben.

Dichtematrix für 2-Zustands-System

Schreibweise in Matrixform:

$$|\varphi_a\rangle = a_1\left|+\frac{1}{2}\right\rangle + a_2\left|-\frac{1}{2}\right\rangle; \quad |\varphi_b\rangle = b_1\left|+\frac{1}{2}\right\rangle + b_2\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|\chi_1\rangle = \left|+\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \quad |\chi_2\rangle = \left|-\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^* & a_2^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|a_1|^2 & a_1a_2^*\\ a_1^*a_2 & |a_2|^2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow \rho = \begin{pmatrix}W_a|a_1|^2 + W_b|b_1|^2 & W_a a_1 a_2^* + W_b b_1 b_2^*\\ W_a a_1^* a_2 + W_b b_1^* b_2 & W_a|a_2|^2 + W_b|b_2|^2\end{pmatrix}}$$

Spur: $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ (gilt auch allgemein)

3. Definition & Eigenschaften des Dichteoperators

Dichtematrix - Definition

$$\boldsymbol{\rho := \sum_i W_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|}$$

- reine Zustände als Spezialfall:

  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

- $|\psi\rangle$ lässt sich entwickeln: $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle$, wenn $\{|n\rangle\}$ Orthonormal-Basis ist.

$\Rightarrow \ \rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{n,m} \psi_n \psi_m^* |n\rangle\langle m| = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle\langle m|$

- Einzelnes Element über: $\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle = \psi_i \psi_j^*$

- ρ ist **hermitesch**!

$\Rightarrow$ ρ besitzt reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenzustände

$\Rightarrow$ ρ lässt sich immer darstellen, so dass die $|\psi_i\rangle$s orthonormal sind!

Eigenschaften: Spur

- Definition der Spur: $\mathrm{tr}(X) = \sum_n \langle n | X | n \rangle$
- Die Spur ist unabhängig von der gewählten ONB!
- Diagonalelemente = Gesamtwahrscheinlichkeit, ein Teilchen

im Zustand $|n\rangle$ zu finden (Besetzungswahrscheinlichkeit):

$$\rho_{nn} = \sum_i W_i \left|\psi_{i,n}\right|^2 \Rightarrow \mathrm{tr}(\rho) = 1$$

Formal:

$$\mathrm{tr}(\rho) = \sum_n \langle n|\rho|n\rangle = \sum_n \left\langle n \middle| \left(\sum_i W_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) \middle| n \right\rangle$$

$$= \sum_{n,i} W_i \langle n|\psi_i\rangle\langle\psi_i|n\rangle$$

$$= \sum_{n,i} W_i \langle\psi_i|n\rangle\langle n|\psi_i\rangle \quad (\text{benutze: } \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1})$$

$$= \sum_i W_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle = \sum_i W_i = 1$$

Eigenschaften: Erwartungswert

- für Observable A gilt: $< A >= \sum_i W_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$

(für reinen Zustand: $< A >= \langle \psi | A | \psi \rangle$)

- Es gilt: $<A> = \mathrm{tr}(A\rho)$
- Beweis: Berechne $\mathrm{tr}(A\rho)$:

$$\mathrm{tr}(A\rho) = \sum_n \langle n | A\rho | n \rangle = \sum_n \left\langle n \middle| A\left(\sum_i W_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) \middle| n \right\rangle$$

$$= \sum_{n,i} W_i \langle n | A | \psi_i \rangle \langle \psi_i | n \rangle$$

$$= \sum_{n,i} W_i \langle \psi_i | n \rangle \langle n | A | \psi_i \rangle \quad \text{(benutze: } \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}\text{)}$$

$$= \sum_i W_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \; < A >$$

$\Rightarrow$ alle Erwartungswerte lassen sich mit der Dichtematrix berechnen!

$\Rightarrow$ **Dichtematrix enthält maximal mögl. Information, die man durch Messungen am System herausbekommen kann!**

Eigenschaften: Charakterisierung gemischter Zustände

- Es gilt: $\langle\rho\rangle \leq 1$ (Gleichheit, falls ρ einen reinen Zustand beschreibt).
- Beweis: Berechne $\langle\rho\rangle$:

$$\langle\rho\rangle = \mathrm{tr}(\rho^2) = \sum_n \langle n|\rho\rho|n\rangle = \sum_n \left\langle n\left|\left(\sum_i W_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)\left(\sum_j W_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\right)\right|n\right\rangle$$

$$= \sum_{n,i,j} W_i W_j \langle n|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j|n\rangle \quad \text{(benutze: } \langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}\text{)}$$

$$= \sum_{n,i} W_i^2 \langle\psi_i|n\rangle\langle n|\psi_i\rangle$$

$$= \sum_i W_i^2 \langle\psi_i|\psi_i\rangle = \sum_i W_i^2$$

- Wegen $W_i \leq 1 \rightarrow W_i^2 \leq 1 \rightarrow \sum_i W_i^2 \leq \sum_i W_i = 1$
- Gleichheit nur, falls nur ein einziges $W_i = 1$ (also liegt ein purer Zustand vor).

Eigenschaften: Zeitentwicklung

- Es gilt: $\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho]$ (von-Neumann-Gleichung)
- Beweis: Berechne $\frac{d}{dt}\rho(t)$:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i W_i \left|\psi_i(t)\right\rangle\left\langle\psi_i(t)\right|\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} = \sum_i W_i \left[\frac{d\left|\psi_i(t)\right\rangle}{dt}\left\langle\psi_i(t)\right| + \left|\psi_i(t)\right\rangle\frac{d\left\langle\psi_i(t)\right|}{dt}\right]$$

Benutze Schrödingergleichung $i\hbar\frac{d\left|\psi_i\right\rangle}{dt} = H\psi_i$:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\sum_i W_i \left[H\left|\psi_i(t)\right\rangle\left\langle\psi_i(t)\right| - \left|\psi_i(t)\right\rangle\left\langle\psi_i(t)\right|H\right] = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho]$$

- Lösung für zeitunabhängiges H:

$$\rho(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)\right)\cdot\rho(t_0)\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)\right)$$

Dichtematrix: Zusammenfassung

Definition :

$$\rho = \sum_i W_i \left| \psi_i \right\rangle \left\langle \psi_i \right|$$

Eigenschaften :

$$\left\langle A \right\rangle = \mathrm{tr}(\rho \cdot A)$$

$$\mathrm{tr}(\rho) = 1$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[H(t), \rho(t)\right]$$

$\left\langle \rho \right\rangle \leq 1$ (Gleichheit für puren Zustand)

4. Gekoppelte Systeme und Verschränkung

Gekoppelte Systeme

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ heißt **Tensorprodukt** der Teilsysteme $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$,

wenn zu jedem Paar von Vektoren $|\phi(1)\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|\chi(2)\rangle \in \mathcal{H}_2$

ein Vektor in $\mathcal{H}$ gehört:

$$|\phi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \quad \text{(Tensorprodukt)}$$

- Wenn $\{|\phi_i(1)\rangle\}$ Basis von $\mathcal{H}_1$ ist und $\{|\chi_i(2)\rangle\}$ Basis von $\mathcal{H}_2$, dann:

$\{|\phi_i(1)\rangle \otimes |\chi_j(2)\rangle\}$ Basis von $\mathcal{H}$.

- $|\phi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$ heißt **Produktzustand**.
- Es gibt Zustände $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |\phi_i(1)\rangle \otimes |\chi_j(2)\rangle$, die sich nicht als Produkt

$|\phi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$ schreiben lassen!

$\Rightarrow$ Solche Superpositionen von Produktzuständen heißen **verschränkt** oder **nicht-separierbar**.

Beispiel für gekoppeltes System

- Beispiel :

  Basis von $\mathcal{H}_1$ sei $\{|1\rangle;|2\rangle\}$ und von $\mathcal{H}_2$: $\{|u\rangle;|v\rangle\}$

  Abkürzung: $|\phi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = |\phi,\chi\rangle$

$\Rightarrow$ beliebiger Zustand: $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |\phi_i,\chi_j\rangle$

$$|\psi\rangle = c_{1u}|1,u\rangle + c_{1v}|1,v\rangle + c_{2u}|2,u\rangle + c_{2v}|2,v\rangle$$

Ergibt eine Messung am System 1 den Wert 1, so ist der neue Zustand:

$$|\psi'\rangle = c'_{1u}|1,u\rangle + c'_{1v}|1,v\rangle = |1\rangle \otimes \left(c'_{1u}|u\rangle + c'_{1v}|v\rangle\right) \leftarrow \text{ Produktzustand}$$

$\Rightarrow$ **Messungen am Untersystem führen auf Produktzustände!**

- Betrachtet man die Dynamik von System, werden sich

Produktzustände i.A. in gemischte, d.h. verschränkte Zustände, entwickeln.

$\Rightarrow$ **Verschränkte Systeme sind der Standardfall.**

Beispiel für Verschränkung

Betrachte Zustand: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,u\rangle + |2,v\rangle\right)$

$\Rightarrow$ Eine Messung an System 1 gibt in 50% der Fälle den Wert 1, in 50% den Wert 2.

Aber: Wahrscheinlichkeit bei Messungen an beiden Systemen
ist nicht das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten!

Fall 1: Messung ergibt $1 \Rightarrow |\psi'\rangle = |1,u\rangle \Rightarrow$ Messung an System 2 ergibt immer u!

Fall 2: Messung ergibt $2 \Rightarrow |\psi'\rangle = |2,v\rangle \Rightarrow$ Messung an System 2 ergibt immer v!

$\Rightarrow$ **Eine Messung an einem System legt den Zustand des anderen eindeutig fest!**
(instantan und unabhängig von der räumlichen Entfernung)

- Trotzdem ist keine Informationsübertragung mit v > c möglich.

Messung am Teilsystem

Fall 1: Produktzustand: $|\psi\rangle = |\phi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$

- Messung einer Observablen an System 1 hängt nur von $|\phi(1)\rangle$ ab
- $|\phi(1)\rangle$ kollabiert zu Eigenfunktion $|\phi_n(1)\rangle$.
- Aber: $|\chi(2)\rangle$ ändert sicht nicht!

Fall 2: kein Produktzustand: $|\psi\rangle \neq |\phi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$

- Es lässt sich kein Zustandsvektor zu einem einzelnen System angeben.
- Zustand des zweiten Teilsystems ändert sich durch die Messung!
- Nach der Messung befindet sich das System in einem Produktzustand, die Systeme "entkoppeln".
- Ergebnisse von Messungen an den Teilsystemen sind nicht unabhängig, sondern **"korreliert"**.

Physikalische Realisierung

Experimente, für die die Quantenphysik Verschränkung voraussagt:

- Wheeler (1946): **Annihilation von Positron und Elektron**

→ Paar von Photonen mit entgegengesetzten Polarisationen

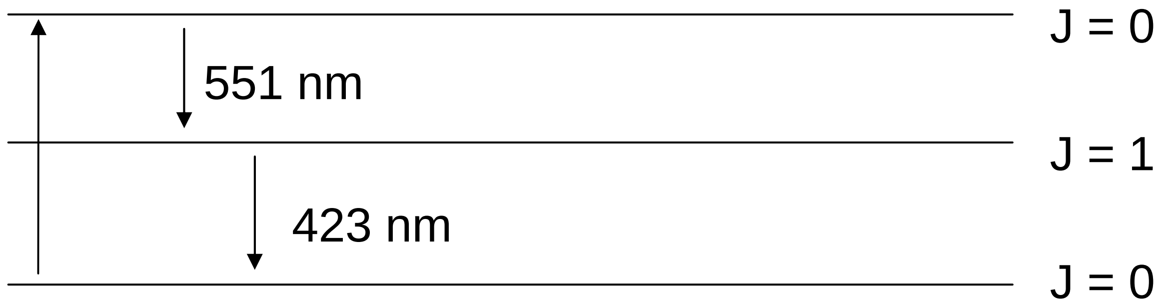
(experimentell durchgeführt von Wu/Shaknov (1949))

- Clauser-Horne-Shimony-Holt (1969): **Anregung von Atomen**

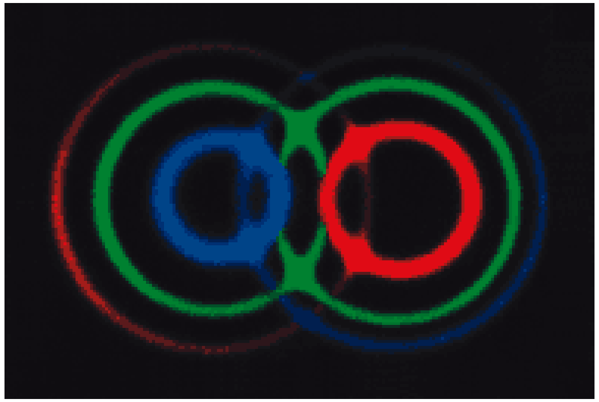
→ Drehimpuls bleibt bei Kaskade erhalten

→ beide Photonen sind (über Polarisation) verschränkt

(experimentell durchgeführt mit Ca-Atomen: Kocher-Commins (1966), Clauser-Freedman (1972), Hg-Atome: Fry-Thompson (1976))



Physikalische Realisierung II



- Dissoziation eines Moleküls im Singlett-Zustand:

→ zwei Atome (Gesamtspin 0)

(experimentell u.a.: Lamehi-Rachti-Mittig (1976))

- Burnham-Weinberg (1970):

"spontaneous parametric down - conversion"

→ in speziellen nicht-linearen Kristallen entsteht ein Paar von Photonen aus einem Photon ($\nu_0 = \nu_1 + \nu_2$).

→ Photonen sind in ihrer Polarisation und Richtung verschränkt.

(experimentell: Mandel-Ghosh (1987))

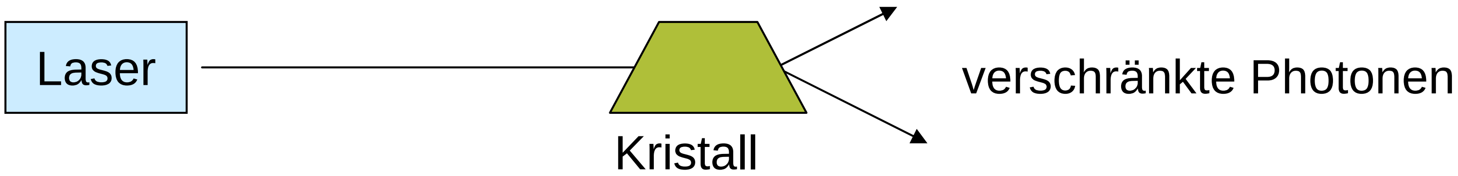


Bild oben: Paul Kwiat und Michael Reck, Institut für Experimentalphysik, Universität Wien

Verborgene Variablen?

- Instantane Festlegung eines Zustands durch Messung an einem

weit entfernten Zustand? Gibt es eine **"spukhafte Fernwirkung"** (Einstein)?

- Korrelationen zwischen zwei Systemen aus der klassischen Welt durchaus bekannt.
- Lassen sich Quantenkorrelationen vielleicht durch einen bisher

unentdeckten verborgenen Parameter erklären, der den Zustand
der beiden Teilsysteme festlegt? (Einstein-Podolsky-Rosen, 1935)

- **Lokalität**: Eine lokale Operation kann auch nur lokale Auswirkungen haben.

$\Rightarrow$ Es muss also schon vor der Trennung der Teilchen festgelegt gewesen sein, welche Messergebnisse auftreten werden (**"verborgener Parameter"**).

- Annahme eines verborgenen Parameters führt auf **Bellsche Ungleichungen**.
- Bellsche Ungleichungen wurden experimentell widerlegt!

($>100\sigma$-Signifikanz, Shih (1983))

$\Rightarrow$ **Die Welt ist nicht lokal - realistisch!**

Erwin Schrödinger: „Verschränkung ist nicht irgendein, sondern geradezu das charakteristische Merkmal der Quantenmechanik.“

Und sonst?!

- Verschränkung mit mehr als zwei Teilchen

(GHZ, Greenberger-Horne-Zeilinger)

- Quantenkryptographie
- Quantencomputing
- Quantenteleportation
- Quantenwaschmittel

Erwin Schrödinger:
„Verschränkung ist nicht irgendein, sondern geradezu das charakteristische Merkmal der Quantenmechanik.“

Und sonst?!

- Verschränkung mit mehr als zwei (GHZ, Greenberger-Horne-Zeilinger)
- Quantenkryptographie
- Quantencomputing
- Quantenteleportation
- Quantenwaschmittel

Danke für die Aufmerksamkeit!

Literatur :

- Schleich, Wolfgang : Quantum Optics in Phase Space, Kapitel 2, Wiley-VCH, Berlin, 2001
- Blum, Karl: Density Matrix Theory and Applications, Kapitel 1-3, Plenum Press, New York, 1981
- Audretsch, Jürgen (Hrsg.): Entangled World, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 2003
- Aczel, Amir: Entanglement, Band 6, Springer, Berlin/Heidelberg, 2004
- Hub, Jochen: Die klassische Welt, Seminarvortrag Akademie Rot an der Rot, Rot, 2004
- "Quantenverschränkung", Wikipedia, abgerufen: 15. Juni 2006,

URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantenverschränkung

- Nolting: Grundkurs Theoretische Physik, Band 6, Springer, Berlin/Heidelberg, 2004